Домашнее задание №1.

Срок сдачи: 21/02/2000.

1. Покажите, что $an+b=\Theta(n)$.

2. Каково математическое ожидание числа выполнений строки 4 алгоритма Minimum в предположении, что все перестановки входной последовательности равновероятны. Докажите, что математическое ожидание равно $\Theta(\lg n)$.

3. Быстрая сортировка.

   ```
   QUICKSORT(A, p, r)
     if p < r then
        q ← PARTITION(A, p, r)
        QUICKSORT(A, p, q)
        QUICKSORT(A, q + 1, r)
     end
   ```

   Покажите, что среднее время работы алгоритма равно $\Theta(n\lg n)$.

   Указания. Найдите рекуррентное соотношение, описывающее $T(n)$. Предположите, что $T(n) \leqslant an\lg n + b$, и докажите утверждение по индукции, используя следующее неравенство:

   $$\sum_{k=1}^{n-1} k\lg k \leqslant \frac{1}{2}n^2\lg n - \frac{1}{8}n^2.$$

4. Алгоритм сортировки называется ***стабильным***, если порядок равных элементов в отсортированной последовательности сохраняется. То есть, если в исходной последовательности $a_i = a_j$ при $i < j$, то в отсортированной последовательности $\pi(i) < \pi(j)$, где $\pi(k)$ — позиция, на которой оказывается элемент, находившийся в исходной последовательности на позиции k.

   Является ли алгоритм Quicksort стабильным? Как он должен быть модифицирован для достижения стабильности?

5. Напишите нерекурсивную версию алгоритма Quickselect.

6. Даны два отсортированных массива $A[1..n]$ и $B[1..n]$ по n элементов, не содержащие одинаковых элементов. Опишите алгоритм, находящий медиану $2n$ элементов за время $O(\lg n)$.